№378

$y^6 = a^2(y^4 - x^4)$

Перейдем к номерным координатам:

$$\begin{cases} \mathrm{x} = \mathrm{r}\cos\phi \\ \mathrm{y} = \mathrm{r}\sin\phi \end{cases}$$

Уравнение кривой запишется в виде:

$(\mathrm{r}\sin\phi)^6 = \mathrm{a}^2(\mathrm{r}^4\sin^4\phi - r^4\cos^4\phi)$

$\mathrm{r}^6\sin^6\phi = a^2\mathrm{r}^4(\sin^4\phi - \cos^4\phi)$

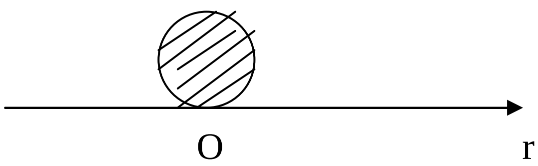
$$\mathrm{r}^2 = \frac{\mathrm{a}^2}{\sin^6\phi}(\sin^4\phi - \cos^4\phi)$$

$$\mathrm{r} = \frac{\mathrm{a}}{\sin^3\phi}\sqrt{(\sin^4\phi - \cos^4\phi)}$$

$\sin^4\phi = \cos^4\phi$

$\sin\phi = \cos\phi$

$$\phi = \frac{\pi}{4}$$



$$S = \iint_D dxdy = \iint_D rdrdy = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} d\phi \int_0^{\frac{a}{\sin^3\phi}\sqrt{\sin^4\phi - \cos^4\phi}} rdr \quad = 4\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{a^2}{\sin^6\phi}\frac{(\sin^4\phi - \cos^4\phi)}{2} d\phi =$$

$$= 2a^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2\phi} - \frac{(1-\sin^2\phi)^2}{\sin^6\phi}\right)d\phi = 2a^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{\sin^2\phi} - \frac{1}{\sin^6\phi} + \frac{2}{\sin^4\phi} - \frac{1}{\sin^2\phi}\right)d\phi =$$

$$= 2a^2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{2}{\sin^4\phi} - \frac{1}{\sin^6\phi}\right)d\phi = 2a^2\left(2\left[-ctg\phi - \frac{ctg^3\phi}{3}\right] + \frac{\cos\phi}{5\sin^5\phi} + \frac{4}{15}\frac{\cos\phi}{\sin^3\phi} + \frac{8}{15}ctg\phi\right)\Bigg|_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} =$$

$$= 4a^2\left(-0-0+1+\frac{1}{3}\right) + 2a^2\left(0+0+0-\frac{1}{5}\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^5 - \frac{4}{15}*\frac{\sqrt{2}}{2}\left(\frac{2}{\sqrt{2}}\right)^3 - \frac{8}{15}\right) =$$

$$= \frac{8a^2}{3} + a^2\left(-\frac{1}{5}*\frac{16}{4} - \frac{4}{15}*\frac{4}{2} - \frac{8}{15}\right) = \frac{8a^2}{3} + a^2\left(-\frac{4}{5} - \frac{8}{15} - \frac{8}{15}\right) = \frac{8a^2}{3} - \frac{28a^2}{15} = \frac{a^2(40-28)}{15} =$$

$$= \frac{24}{15}a^2 = \frac{8}{5}a^2 (кв.ед.).$$

Kvadromir.com

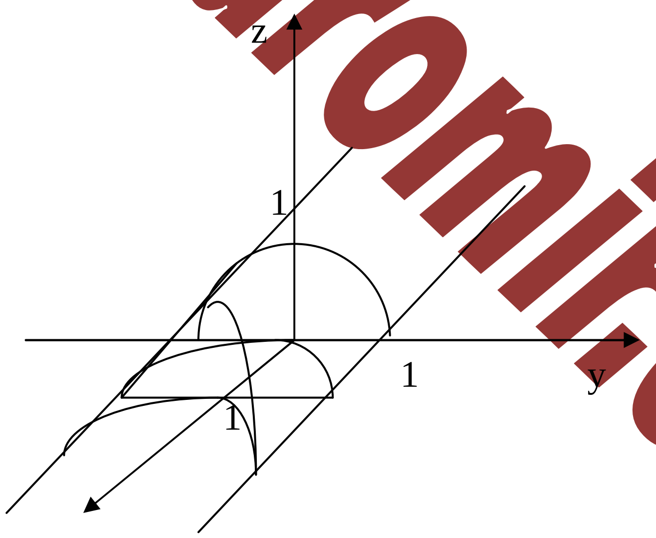
kvadromir.com

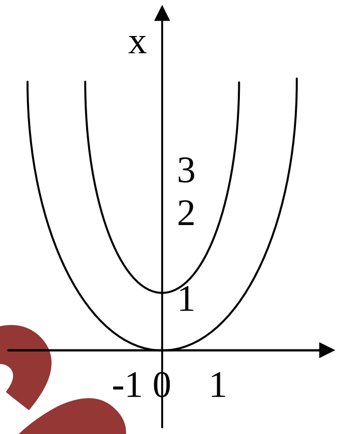
№388

$z=0,\quad z=1-y^2,\quad x=y^2;\quad x=2y^2+1$

$$V=\iiint_T dxdydz=2\int_0^1 dy\int_{y^2}^{2y^2+1}dx\int_0^{1-y^2}dz=2\int_0^1 dy\int_{y^2}^{2y^2+1}(1-y^2)dx=2\int_0^1(1-y^2)(2y^2+1-y^2)dy=$$

$$=2\int_0^1(1-y^2)(1+y^2)dy=2\int_0^1(1-y^4)dy=2\left(y-\frac{y^5}{5}\right)\Bigg|_0^1=2\left(1-\frac{1}{5}\right)=2*\frac{4}{5}=\frac{8}{5}(кв.ед.).$$





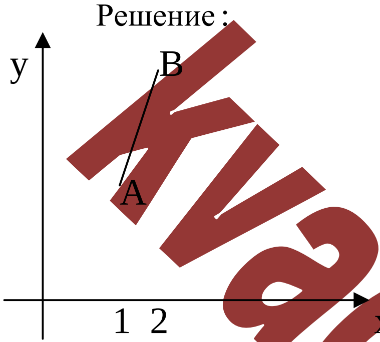
№398

Вычислить криволинейный интеграл

$$\int_L \frac{y^2+1}{y}dx - \frac{x}{y^2}dy$$

Вдоль отрезка LAB прямой от точки A(1;2) до точки B(2;4)

Решение:



Kvadromir.com

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

$$\frac{x-1}{2-1} = \frac{y-2}{4-2} = t$$

$$\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = t; \quad \begin{cases} x-1=t \\ y-2=2t \end{cases}$$

$$\begin{cases} x=1+t \\ y=2(1+t) \end{cases} \qquad y=2x$$

$$x'_t = dt; \quad y't = 2dt$$

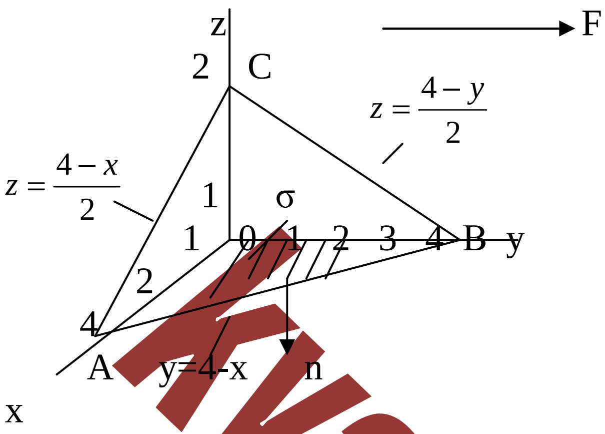
Следовательно: в точке (A)t = 0; в точке (B)t = 1

$$\int_A^B \frac{y^2+1}{y}dx - \frac{xdy}{y^2} = \int_0^1 \frac{4(1+t)^2+1}{2(t+1)}dt - \frac{(1+t)^2*2}{4(1+t)^2}dt = \int_0^1 \left[2(t+1) + \frac{1}{2(t+1)} - \frac{1}{2(t+1)}\right]dt =$$

$$= \int_0^1 2(t+1)dt = \frac{2(t+1)^2}{2}\Bigg|_0^1 = (t+1)^2\Big|_0^1 = 4-1=3.$$

№408

$\overline{F} = (3x+4y+2z)\,\overline{j}; \quad P: x+y+2z-4=0;$



Векторная функция $\overline{F}$ направлена вдоль оси y

1. Поток вектора $\overline{F}$ через повнрхность σ

$$\Phi = \iint_\sigma (Pdydz + Qdzdx + Rdxdy);$$

Подставляем:

$$\Phi = \iint_\sigma F_y dxdz = -\int_0^4 dx \int_0^{4-x} (3x+4y+2z)dz$$

Поскольку вектор нормали $\overline{n} \perp \overline{F}$, то поток равен нулю: $\Phi = 0$;

2. Циркуляция вектора $\overline{F}$ по контуру λ. Непосредственное вычисление.

$$C = \oint_\lambda (Pdx + Qdy + Rdz) = \oint_\lambda (3x+4y+2z)dy;$$

Контур λ состоит из 3-ёх отрезков: OA, AB и BO:

$$C = \int_{OA} + \int_{AB} + \int_{BO};$$

1. Отрезок OA, z = 0; y = 0;

$$\int_{OA} 3xdy = 0$$

2. Отрезок AB, z = 0

$$\int_{AB} = \int_0^4 (3x+4y)dy = \int_0^4 \big(3(4-y)+4y\big)dy = \frac{1}{2}\int_0^4 (12+y)dy = \left[\frac{y}{2}\left(12+\frac{1}{2}y^2\right)\right]_0^4 = 48+8=56.$$

3. Отрезок BO

$$\int_{BO} = \int_4^0 4ydy = -32$$

$C = 0 + 56 - 32 = 24;$

4. Циркуляция C. Теорема Стокса.

$$C = \oint_{\lambda} Pdx + Qdy + Rdz = \iint_{S} (\overline{n}, rot\overline{F})dS;$$

Вычисляем $rot\overline{F}$:

$$rot\overline{F} = \begin{vmatrix} \overline{i} & \overline{j} & \overline{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & 3x+4y+2z & 0 \end{vmatrix} = -2\overline{j} + 3\overline{k}$$

$$C = \iint_{S} (rot\overline{F})_x dydz + (rot\overline{F})_y dxdz + (rot\overline{F})_z dxdy;$$

Поток через поверхность σ :

$C = 3\iint_{Dxy} dxdy;$ где Dxy - область интегрирования, проекция поверхности S на плоскость xy системы координат.

$$C = 3\int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy = 3\left(4x - \frac{x^2}{2}\right)\Bigg|_0^4 = 3(16-8) = 24;$$

5.Поток векторного поля через поверхность пирамиды. Теорема Остроградского - Гаусса.

$$\Phi = \oiint_{S} \overline{F}\,\overline{dS} = \iiint_{V} div\overline{F}dV;$$

$$div\overline{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 4;$$

$$\Phi = 4\int_0^4 dx \int_0^{4-x} dy \int_0^{\frac{4-x-y}{2}} dz = \frac{1}{2}4\int_0^4 dx \int_0^{4-x} (4-x-y)dy = 2\int_0^4 dx\left[(4-x)^2 - \frac{1}{2}(4-x)^2\right] = \int_0^4 (4-x)^2 dx =$$

$$= -\frac{(4-x)^3}{3}\Bigg|_0^4 = \frac{64}{3} = 21{,}3.$$

5. Нахождение потока непосредственным вычислением.

$$\Phi = \oiint_{S} (\overline{F}, \overline{n})dS = \iint_{OAB} + \iint_{OAC} + \iint_{OBC} + \iint_{ABC};$$

Поток вектора $\overline{F}$ через грани OBC и OAB равен нулю, поскольку вектора нормали $\overline{n} \perp \overline{F}$;

$$\Phi_1 = \iint_{OAC} = \iint_{OAC} Qdxdz = \int_0^4 dx \int_0^{\frac{4-x}{2}} (3x+2z)dz = \int_0^4 dx\left(3xz + z^2\right)\Bigg|_0^{\frac{4-x}{2}} = \frac{1}{2}\int_0^4 \left(3x(4-x) + \frac{(4-x)^2}{2}\right)dx =$$

$$= \frac{1}{4}\int_0^4 (4-x)(6x+4-x)dx = \frac{1}{4}\int_0^4 (4-x)(5x+4)dx = \frac{1}{4}\int_0^4 (16+16x-5x^2)dx = \frac{1}{4}\left(16+8x-\frac{5}{3}x^2\right)\Bigg|_0^4 =$$

$$= \left(16+32-\frac{80}{3}\right) = (48-26{,}7) = 21{,}3.$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_9.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 9. Вариант 8. Номера 378, 388, 398, 408, 418

Kvadromir.com

kvadromir.com

№418

$$F=(7x-2yz)i+(7y-2xz)j+(7z-2xy)k$$

$$rotF=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 7x-2yz & 7y-2xz & 7z-2xy \end{vmatrix}=i\frac{\partial}{\partial y}(7z-2xy)+j\frac{\partial}{\partial z}(7z-2yz)+k\frac{\partial}{\partial x}(7z-2xz)-$$

$$-k\frac{\partial}{\partial y}(7z-2yz)-i\frac{\partial}{\partial z}(7z-2xz)-j\frac{\partial}{\partial x}(7z-2xy)=-i2x-j2y-k2z+k2z+i2x+j2y=0\Rightarrow$$

$\Rightarrow$ поле F является потенциальным, найдем его потенциал по формуле:

$$U(\mathrm{x,y,z})=\int_{\mathrm{x}_0}^{\mathrm{x}}P(x,y_0,z_0)dx+\int_{y_0}^{y}Q(x,y,z_0)dy+\int_{z_0}^{z}R(x,y,z)dz+C$$

$$U(x,y,z)=\int_0^x 7xdx+\int_0^y 7ydy+\int_0^z 7zdz-\int_0^z 2xydz=\left.\frac{7x^2}{2}\right|_0^x+\left.\frac{7y^2}{2}\right|_0^y+\left.\frac{7z^2}{2}\right|_0^z-\left.2xyz\right|_0^z=$$

$$=\frac{7x^2}{2}+\frac{7y^2}{2}+\frac{7z^2}{2}-2xyz$$

$$divF=\frac{\partial P}{\partial x}+\frac{\partial Q}{\partial y}+\frac{\partial R}{\partial z}$$

$$divF=\frac{\partial(7x-2yz)}{\partial x}+\frac{\partial(7y-2xz)}{\partial y}+\frac{\partial(7z-2xy)}{\partial z}=7+7+7=21\neq 0\Rightarrow$$ поле не является соленоидальным.

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_9.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 9. Вариант 8. Номера 378, 388, 398, 408, 418