№290

$$a)\int\frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}dx=\int\sqrt[3]{4+\ln x}\,d\ln x=\frac{3}{4}|4+\ln x|+C$$

Проверка:

$$\left(\frac{3}{4}(4+\ln x)^{\frac{4}{3}}+C\right)'=\frac{3}{4}*\frac{4}{3}(4+\ln x)^{\frac{1}{3}}\frac{1}{x}=\frac{\sqrt[3]{4+\ln x}}{x}$$

$$б)\int x\ln^2 xdx=\left|\begin{array}{c} u=\ln^2 x \\ dv=xdx \\ v=\frac{x^2}{2} \\ du=2\frac{\ln x}{x}dx \end{array}\right|=\ln^2 x\frac{x^2}{2}-\int\frac{x^2}{2}*\frac{2\ln x}{x}dx=\ln^2 x\frac{x^2}{2}-\int x\ln xdx=$$

$$=\begin{bmatrix} u=\ln x & du=\frac{dx}{x} \\ dv=xdx & v=\frac{x^2}{2} \end{bmatrix}=\ln^2 x\frac{x^2}{2}-\ln x\frac{x^2}{2}+\int\frac{x^2}{2}\frac{dx}{x}=\ln^2 x\frac{x^2}{2}-\ln x\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}+C$$

Проверка:

$$\left(\ln^2 x\frac{x^2}{2}-\ln x\frac{x^2}{2}+\frac{x^2}{4}+C\right)'=2\ln x\frac{1}{x}*\frac{x^2}{2}+\ln^2 x*x-\frac{1}{x}\frac{x^2}{2}-\ln x*x+\frac{x}{2}$$

$$в)\int\frac{(x^3-6)}{x^4+6x^2+8}dx=I$$

$$x^4+6x^2+8=0$$

$$D=36-32=4$$

$$x_1^2=\frac{-6-2}{2}=-4;\ x_2^2=\frac{-6+2}{2}=-2$$

$$I=\int\frac{(x^3-6)dx}{(x^2+4)(x^2+2)}$$

$$\frac{x^3-6}{(x^2+4)(x^2+2)}=\frac{Ax+B}{x^2+4}+\frac{Cx+D}{x^2+2}=\frac{(Ax+B)(x^2+2)+(Cx+D)(x^2+4)}{(x^2+4)(x^2+2)}$$

$$\begin{array}{l|c} x^3 & A+C=1 \\ x^2 & B+D=0 \\ x^1 & 2A+4C=0 \\ x^0 & 2B+4D=-6 \end{array}\Rightarrow \begin{array}{c} B=-D \\ A=-2C \\ -2C+C=1 \\ C=-1 \\ A=2 \\ -2D+4D=-6 \\ D=-3;B=3 \end{array}$$

$$I=\int\frac{2x+3}{x^2+4}dx+\int\frac{-x-3}{x^2+2}dx=\int\frac{d(x^2+4)}{x^2+4}-\frac{1}{2}\int\frac{d(x^2+2)}{x^2+2}+3\int\frac{dx}{x^2+4}-3\int\frac{dx}{x^2+2}=$$

$$=\ln(x^2+4)-\frac{1}{2}\ln(x^2+2)+\frac{3}{2}arctgx-\frac{3}{\sqrt{2}}arctg\frac{x}{\sqrt{2}}+C.$$

$$г)\int\frac{dx}{2\sin x+\cos x+2}=\left|\begin{array}{c} tg\frac{x}{2}=t \\ \sin x=\frac{2t}{1+t^2} \\ \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2} \\ dx=\frac{2dt}{1+t^2}\end{array}\right|=\int\frac{2dt}{(1+t^2)\left(\frac{4t}{1+t^2}+\frac{1-t^2}{1+t^2}+2\right)}=2\int\frac{dt}{4t+1-t^2+2+2t^2}=$$

$$=2\int\frac{dt}{t^2+4t+3}=2\int\frac{dt}{(t+3)(t+1)}=I$$

$$\frac{1}{(t+3)(t+1)}=\frac{A}{t+3}+\frac{B}{t+1}=\frac{At+A+Bt+3B}{(t+3)(t+1)}$$

$$\begin{array}{l|l} t^1 & A+B=0 \\ t^0 & A+3B=1 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} A=-B \\ 2B=1 \Rightarrow B=\frac{1}{2}; A=-\frac{1}{2} \end{array}$$

$$I=2\left(-\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+3}+\frac{1}{2}\int\frac{dt}{t+1}\right)=-\ln|t+3|+\ln|t+1|+C=-\ln\left|tg\frac{x}{2}+3\right|+\ln\left|tg\frac{x}{2}+1\right|+C.$$

№300

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^2+11}dx$$

Найдём значения подынтегральной функции для следующих значений аргумента($h=1$)

$x_0=-2; x_1=-1; x_2=0; x_3=1; x_4=2; x_5=3; x_6=4; x_7=5; x_8=6; x_9=7; x_{10}=8$

Находим соответствующие значения $f(x)=\sqrt{x^2+11}$

$y_0=\sqrt{15}=3{,}873; y_1=\sqrt{12}=3{,}464; y_2=\sqrt{11}=3{,}317; y_3=\sqrt{12}=3{,}464; y_4=\sqrt{15}=3{,}873;$

$y_5=\sqrt{20}=4{,}472; y_6=\sqrt{27}=5{,}196; y_7=\sqrt{36}=6; y_8=\sqrt{47}=6{,}856; y_9=\sqrt{60}=7{,}746;$

$y_{10}=\sqrt{75}=8{,}66$

По формуле Сипсона:

$$\int_{-2}^{8}\sqrt{x^2+11}dx=\frac{h}{3}[y_0+y_{10}+4(y_1+y_3+y_5+y_7+y_9)+2(y_2+y_4+y_6+y_8)]=$$

$$=\frac{1}{3}[3{,}873+8{,}66+4(3{,}464+3{,}464+4{,}472+6+7{,}746)+2(3{,}317+3{,}873+5{,}196+6{,}856)]=$$

$$=\frac{1}{3}[12{,}533+100{,}584+38{,}484]=50{,}534.$$

№310

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{x^2+4x+5}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dx}{(x+2)^2+1}=arctg(x+2)\Big|_{-\infty}^{+\infty}=\frac{\pi}{2}-\left(-\frac{\pi}{2}\right)=\pi$$

Интеграл сходится $\Rightarrow$ данный ряд сходится.

№320

$$\begin{cases} x=3(t-\sin t) \\ y=3(1-\cos t) \end{cases},\quad 0\le t\le 2\pi$$

$$L=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\dot{x}^2+\dot{y}^2}\,dt$$

$$\dot{x}=3(1-\cos t)$$

$$\dot{y}=3\sin t$$

$$\dot{x}^2+\dot{y}^2=9(1-2\cos t+\cos^2 t)+9\sin^2 t=9-18\cos t+9=18(1-\cos t)=36\sin^2\frac{t}{2}$$

$$L=\int_0^{2\pi}\sqrt{36\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=6\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=12\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,d\left(\frac{t}{2}\right)=-12\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi}=-12[\cos\pi-\cos 0]=-12[-1-1]=$$

$$-12*(-2)=24$$