№233

$$z = \ln(x^2 + y^2 + 2x + 1); F = \frac{\partial^2 z}{dx^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}$$

$$\frac{\partial z}{\partial x} = \frac{2x+2}{x^2 + y^2 + 2x + 1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{dx^2} = \frac{2(x^2 + y^2 + 2x + 1) - (2x+2)(2x+2)}{(x^2 + y^2 + 2x + 1)} =$$

$$= \frac{2x^2 + 2y^2 + 4x + 2 - 4x^2 - 8x - 4}{(x^2 + y^2 + 2x + 1)^2} = \frac{-2x^2 + 2y^2 - 4x - 2}{(x^2 + y^2 + 2x + 1)};$$

$$\frac{\partial z}{\partial y} = \frac{2y}{x^2 + y^2 + 2x + 1}$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 + y^2 + 2x + 1) - 2y(2y)}{(x^2 + y^2 + 2x + 1)^2} = \frac{2x^2 + 2y^2 + 4x + 2 - 4y^2}{(x^2 + y^2 + 2x + 1)^2} =$$

$$= \frac{2x^2 - 2y^2 + 4x + 2}{(x^2 + y^2 + 2x + 1)^2};$$

$$F = \frac{-2x^2 + 2y^2 - 4x - 2 + 2x^2 - 2y^2 + 4x + 2}{(x^2 + y^2 + 2x + 1)} = 0;$$

что и требовалось доказать.

№243

$z = x^2 + 3xy - 6y; \quad A(4;1), B(3{,}96;1.03)$

$1) z_1 = z(B) = (3{,}96)^2 + 3*3{,}96*1{,}03 - 6*1{,}03 = 15{,}6816 + 12{,}2364 - 6{,}18 = 12{,}738$

$2) \bar{z}_1(B) = z_0(A) + \frac{\partial z}{\partial x}(A)\Delta x + \frac{\partial z}{\partial y}(A)\Delta y$

$\Delta x = 3{,}96 - 4 = 0{,}04$

$\Delta y = 1{,}03 - 1 = 0{,}03$

$\frac{\partial z}{\partial x} = 2x + 3y; \frac{\partial z}{\partial y}(A) = 2*4 + 3*1 = 8 + 3 = 11$

$\frac{\partial z}{\partial y} = 3x - 6; \frac{\partial z}{\partial y}(A) = 3*4 - 6 = 6$

$z_0(A) = 4^2 + 3*4*1 - 6*1 = 16 + 12 - 6 = 22.$

$\bar{z}_1(B) = 22 + 11(-0{,}04) + 6*0{,}03 = 22 - 0{,}44 + 0{,}18 = 21{,}74$

3) Оценим погрешность:

$$\varepsilon = \frac{|\bar{z}_1 - \bar{z}|}{z_1} * 100\% = \frac{|21{,}738 - 21{,}74|}{21{,}738} * 100\% = 0{,}0092\%$$

4) Уравнение касательной плоскости:

$$z - z_0 = \left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_C (x - x_0) + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_C (y - y_0)$$

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)_C = 11; \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)_C = 6; z_0 = 22.$$

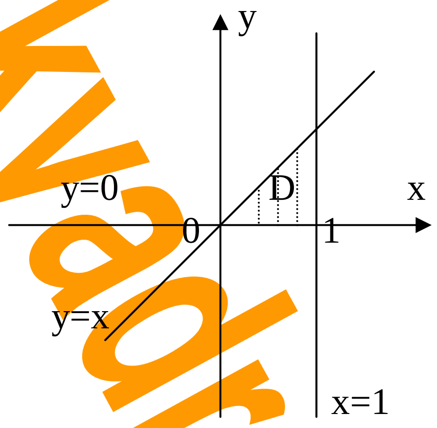
Получаем:

$z - 22 = 11(x - 4) + 6(y - 1)$ или

$11x + 6y - z - 28 = 0.$

№253

$z=3-2x^2-xy-y^2 \qquad x\le 1,\quad y\ge 0,\quad y\le x$



Найдём стационарные точки данной функции:

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-4x-y$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-x-2y$$

В силу необходимости условий экстремума, находим:

$$\begin{cases} 4x+y=0 \Rightarrow & x=-2y \\ x+2y=0 & -8y+y=0 \Rightarrow x=0, y=0 \end{cases}$$

При x = 1 получаем:

$$z=3-2-y-y^2=1-y-y^2$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=-1-2y=0$$

$$7=-\frac{1}{2}; x=-1$$

При $y=x$: $z=3-2x^2-x^2-x^2=3-4x^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-8x=0 \Rightarrow x=0; y=0$$

При $y=0: z=3-2x^2$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-4x=0$$

$$x=0, y=0$$

Таким образом,

$$z(0;0)=3$$

$$z\left(1;-\frac{1}{2}\right)=\in D; \quad z(1;1)=3-2*1^2-1*1-1^2=-1$$

$$z_{\min}=z(1;1)=-1$$

$$z_{\max}=z(0;0)=3.$$

№263

$z=\ln\left(5x^2+3y^2\right)\quad A(1;1),\bar{a}(3;2)$

1)Градинет функции:

$$\overline{gradz}(A)=\left(\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A;\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\right)$$

$$\frac{\partial z}{\partial x}=\frac{10x}{5x^2+3y^2};\quad \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A=\frac{10}{5+3}=\frac{10}{8}=\frac{5}{4}$$

$$\frac{\partial z}{\partial y}=\frac{6y}{5x^2+3y^2};\quad \left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A=\frac{6}{5+3}=\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$$

$$\overline{gradz}(A)=\left(\frac{5}{4};\frac{3}{4}\right)$$

2)Производную в точке А по направлению вектора $\bar{a}$ найдём по формуле:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}\right|_A=\left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_A\cos\alpha+\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_A\cos\beta$$

$$\cos\alpha=\frac{a_x}{\sqrt{ax^2+ay^2}}=\frac{3}{\sqrt{9+4}}=\frac{3}{\sqrt{13}}$$

$$\cos\beta=\frac{a_y}{\sqrt{ax^2+ay^2}}=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

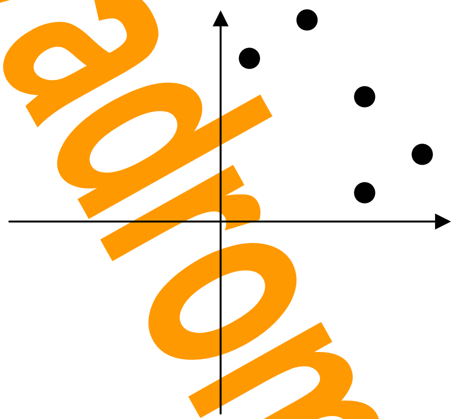
Получаем:

$$\left.\frac{\partial z}{\partial \bar{a}}\right|_A=\frac{5}{4}*\frac{3}{\sqrt{13}}+\frac{3}{4}*\frac{2}{\sqrt{13}}=\frac{15+6}{4\sqrt{13}}=\frac{21}{4\sqrt{13}}.$$

№273

x	1	2	3	4	5
y	4,7	5,7	4,2	2,2	2,7

Построим точки $(x_i;y_i)$ в системе координат XOY.



Из графика видно, что исходные данные ‘группируются’ вдоль некоторой прямой, т.е. имеет место линейная зависимость всегда y=ax+b. Подберём параметры a и b так, чтобы функция y=ax+b наилучшим образом описывала рассматриваемую зависимость.

По методу наименьших квадратов получаем:

$$S(a,b)=\sum_{i=1}^{n}(y_i(ax_i+b))^2 \to \min$$

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-ax_i-b)(-x_i)=2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i^2-\sum_{i=1}^{n}x_i-y_i+b\sum_{i=1}^{n}x_i\right);$$

$$\frac{\partial S}{\partial a}=\sum_{i=1}^{n}2(y_i-ax_i-b)(-1)=2\left(a\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}y_i+bn\right)$$

Параметры a и b расходится из системы уравнений:

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i^2+b\sum_{i=1}^{n}x_i-\sum_{i=1}^{n}x_iy_i$$

$$a\sum_{i=1}^{n}x_i+bn=\sum_{i=1}^{n}y_i$$

Для получения суммы, входящих в систему, составим расчётную таблицу:

i	x_i	y_i	x_i^2	$x_i y_i$
1	1	4,7	1	4,7
2	2	5,7	4	11,4
3	3	4,2	9	12,6
4	4	2,2	16	8,8
5	5	2,7	15	13,5
Σ	15	19,5	55	51

Система уравнений примет вид:

$$\begin{cases} 55a + 15b = 51 \\ 15a + 5b = 19{,}5 \end{cases}$$

$$5b = 19{,}5 - 15a$$

$$55a + 58{,}5 - 45a = 51$$

$$10a = -7{,}5$$

$$a = -0{,}75; \qquad b = \frac{19{,}5 + 11{,}25}{5} = 6{,}15$$

Искомая линнейная функция имеет вид:

$y = -0{,}75x + 6{,}15$. Построим график полученной зависимости: