№476

$f(x) = x; \quad F(x) = \cos x$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u\big|_{t_0=0} = x; \quad \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t_0=0} = \cos x$$

Воспользуемся формулой:

$$u = \frac{\varphi(x-at)+\varphi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz, \text{ где}$$

$\varphi(x) = x; \quad \Psi(z) = \cos z$

Получаем:

$$u = \frac{x-at+x+at}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\cos z dz = x + \frac{1}{2a}\sin z\Big|_{x-at}^{x+at} = x + \frac{1}{2a}(\sin(x+at) - \sin(x-at)) =$$

$$= x + \frac{1}{2a}(\sin at \cos x).$$

№486

$z_0 = \frac{\pi}{6}$

$w = e^{1-2iz} = e^{1-2i(x+yi)} = e^{1-2ix+2y} = e^{1+2y-2xi} = e^{1+2y}\left(\cos(-2x) + i\sin(-2x)\right) = e^{1+2y}\cos 2x - ie^{1+2y}\sin 2x$

$u(x;y) = e^{2y+1}\cos 2x$

$v(x;y) = e^{-2y+1}\sin 2x$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y}; \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y}$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \left(e^{2y+1}\cos 2x\right)'_x = -2e^{2y+1}\sin 2x$

$\frac{\partial v}{\partial y} = \left(-e^{2y+1}\sin 2x\right)'_y = -e^{2y+1}2\sin 2x$

$\frac{\partial v}{\partial x} = \left(-e^{2y+1}\sin 2x\right)'_x = 2e^{2y+1}\cos 2x$

$\frac{\partial u}{\partial y} = \left(e^{2y+1}\cos 2x\right)'_y = 2e^{2y+1}\cos 2x$

$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} = -2e^{2y+1}\sin 2x$

$\frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\partial u}{\partial y} = -2e^{2y+1}\cos 2x$

Функция является аналитической

$f'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} + i\frac{\partial v}{\partial x} = -2e^{2y+1}\sin 2x + i(-2e^{2y+1}\cos 2x)$

$f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = -2e^{2*0+1}\sin 2\frac{\pi}{6} + i\left(-2 * e^{2*0+1}\cos 2\frac{\pi}{6}\right) = -2\sin\frac{\pi}{2} - 2i\cos\frac{\pi}{3} = -2\frac{\sqrt{3}}{2} - 2i\frac{1}{2} = -\sqrt{2} - i.$

№496

Разложить функцию f(z) в ряд Лорана в окрестности точки z_0 определить область сходимости этого ряда.

$$f(z) = \cos\frac{z}{z-1},\ z_0 = 1$$

Решение:

Поскольку

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k}}{(2k)!},$$

$$\sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots = \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{z^{2k+1}}{(2k+1)!},$$

то

$$\cos\left(\frac{z}{z-1}\right) = \cos\left(1 - \frac{1}{z-1}\right) = \cos 1 \cos\frac{1}{z-1} + \sin 1 \sin\frac{1}{z-1} = \cos 1 * \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!} * \frac{1}{(z-1)^{2k}} +$$

$$+ \sin 1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} * \frac{1}{(z-1)^{2k+1}} \qquad (*)$$

Поскольку функция $f(z) = \cos\frac{z}{z-1}$ дифференцируема во всей комплексной плоскости, кроме точки $z_0 = +1$, то ряд (*) сходится всюду и $R = +\infty$

Ответ: $\cos\left(\frac{z}{z-1}\right) = \cos 1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k)!} * \frac{1}{(z-1)^{2k}} + \sin 1 \sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k \frac{1}{(2k+1)!} * \frac{1}{(z-1)^{2k+1}},$

$R = +\infty.$

№506

$x''+9x=\cos 3t; \quad x(0)=t; \quad x'(0)=0$

$x(t)=x(p)$

$x'(t)=p*x(p)-1$

$x''(t)=p^2x(p)-p; \quad \cos 3t=\dfrac{p}{p^2+9}$

$p^2*x(p)-p+9x(p)=\dfrac{p}{p^2+9}$

$x(p)(p^2+9)=\dfrac{p}{p^2+9}+p$

$x(p)=\dfrac{p}{(p^2+9)^2}+\dfrac{p}{(p^2+9)}=\dfrac{1}{6}*\dfrac{6p}{(p^2+3^2)^2}+\dfrac{p}{p^2+3^2};$

$\dfrac{p}{(p^2+9)^2}=\dfrac{2*3*p}{6(p^2+3^2)^2}=\dfrac{1}{6}t\sin 3t$

$\dfrac{p}{(p^2+9)}=\cos 3t$

$x(t)=\dfrac{1}{6}t\sin 3t+\cos 3t$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_11.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 11. Вариант 6. Номера 476, 486, 496, 506, 516

№516

$$\begin{cases} x' = -x + y + z & x(0) = 2 \\ y' = x - y + z & y(0) = 2 \\ z' = x + y - z & z(0) = -1 \end{cases}$$

$$x = \overline{x} \qquad x' = p * \overline{x} - 2$$

$$y = \overline{y} \qquad y' = p * \overline{y} - 2$$

$$z = \overline{z} \qquad z' = p * \overline{z} + 1$$

$$\begin{cases} p * \overline{x} - 2 = -\overline{x} + \overline{y} + \overline{z} \\ p * \overline{y} - 2 = \overline{x} - \overline{y} + \overline{z} \\ p * \overline{z} + 1 = \overline{x} + \overline{y} - \overline{z} \end{cases}$$

$$p\overline{y} - 2 + p\overline{z} + 1 = 2\overline{x} \qquad p\overline{x} - 4 + p\overline{y} = 2\overline{z} \qquad p\overline{x} - 2 + p\overline{z} + 1 = 2\overline{y}$$

$$p\overline{y} + p\overline{z} - 1 = 2\overline{x} \qquad p\overline{x} + p\overline{y} - 4 = 2\overline{z} \qquad p\overline{x} + p\overline{z} - 1 = 2\overline{y}$$

$$(1) \quad \overline{z} = \frac{p\overline{x} + p\overline{y} - 4}{2}$$

$$\begin{cases} p\overline{y} + p\overline{z} - 1 = 2\overline{x} \\ p\overline{x} + p\overline{z} - 1 = 2\overline{y} \\ p\overline{x} + p\overline{y} - 4 = 2\overline{z} \end{cases}$$

$$p\overline{y} + p\overline{z} - 1 - p\overline{x} - p\overline{z} + 1 = 2\overline{x} - 2\overline{y}$$

$$p\overline{y} + 2\overline{y} = 2\overline{x} + p\overline{x}$$

$$\overline{x}(2 + p) = \overline{y}(2 + p)$$

$$\overline{x} = \overline{y}$$

$$p\overline{y} + p\overline{z} - 1 - p\overline{x} - p\overline{y} + 4 = 2\overline{x} - 2\overline{z}$$

$$2\overline{x} + p\overline{x} = 2\overline{z} + p\overline{z} + 3$$

$$\overline{z}(2 + p) = \overline{x}(2 + p) - 3$$

$$(2) \quad \overline{z} = \overline{x} - \frac{3}{2 + p}$$

Из $(1)\ \overline{z} = p\overline{x} - 2 \quad (1) = (2)$

$$p\overline{x} - 2 = \overline{x} - \frac{3}{2 + p}$$

$$x = \frac{2}{p - 1} - \frac{3}{(p - 1)(p + 2)}$$

$$\frac{3}{(p + 1)(p + 2)} = \frac{A}{p + 1} + \frac{B}{p + 2} = \frac{A(p + 2) + B(p - 1)}{(p - 1)(p + 2)} = \frac{1}{p - 1} - \frac{1}{p + 2}$$

$$\begin{array}{l|l} p^1 & A + B = 0 \\ p^0 & 2A - B = 3 \end{array} \qquad A = -B$$

$$2A + A = 3$$

$$A = 1; B = -1$$

$$\overline{x} = \frac{2}{p - 1} - \frac{1}{p - 1} + \frac{1}{p + 2} = \frac{1}{p - 1} + \frac{1}{p + 2}$$

$$\frac{1}{p - 1} = e^t; \qquad \frac{1}{p + 2} = e^{-2t}$$

$$x = y = e^t + e^{-2t}$$

$$\bar{z} = \frac{1}{p-1} - \frac{3}{p+2} = \frac{1}{p-1} - \frac{2}{p+2}$$

$$\frac{2}{p+2} = 2e^{-2t}$$

$$z = e^{t} - 2e^{-2t}$$

Проверка:

$$x' = e^{t} - 2e^{-2t} = y'; \quad z' = e^{t} + 4e^{-2t}$$

$$e^{t} + 4e^{-2t} = 2e^{t} + 2e^{-2t} + 2e^{-2t} - e^{t} + 2e^{-2t} = e^{t} + 4e^{-2t}.$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_11.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 11. Вариант 6. Номера 476, 486, 496, 506, 516