## №475

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

$$u\Big|_{t_0=0} = \sin x; \quad \frac{\partial u}{\partial t}\Big|_{t_0=0} = V_0$$

$$u = \frac{\phi(x-at)+\phi(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\Psi(z)dz, \text{ где}$$

$$\phi(\Psi) = \sin x; \ \Psi(x) = V_0$$

Таким образом:

$$u = \frac{\sin(x-at)+\sin(x+at)}{2} + \frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}V_0 dz = \frac{\sin(x-at)+\sin(x+at)}{2} + \frac{V_0}{2a}(x+at-x+at) =$$

$$= \frac{\sin(x-at)+\sin(x+at)}{2} + t*V_0$$

Т.е. $u = \dfrac{\sin(x-at)+\sin(x+at)}{2} + t*V_0.$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_11.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 11. Вариант 5. Номера 475, 485, 495, 505, 515

## №485

$$\omega = z^3 + 3z - i \quad , z_0 = -i$$

$$\omega = (x+iy)^3 + 3(x+iy) - i = x^3 + 3x^2 iy - 3xy^2 - iy^3 + 3x + 3iy - i = (x^3 - 3xy^2 + 3x) + i(3x^2 y - y^3 + 3y - 1).$$

$$u(x,y) = x^3 - 3xy^2 + 3x, \quad V(x,y) = 3x^2 y - y^3 + 3y - 1$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3x^2 - 3y^2 + 3 = \frac{\partial V}{\partial y} = 3x^2 - 3y^2 + 3$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -6xy = -\frac{\partial V}{\partial x} = -(6xy)$$

Условия Коши - Римана выполнились, значит данная функция аналитическая. Найдём значение её производной в точке $z_0 = -i$

$$\omega = z^3 + 3z - i$$

$$\omega' = 3z^2 + 3$$

$$\omega'(-i) = 3(-i)^2 + 3i = -3 + 3 = 0.$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_11.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 11. Вариант 5. Номера 475, 485, 495, 505, 515

## №495

Разложить функцию f(z) в рад Лорана в окресности точки $z_0$ и определить область сходимости этого ряда.

$$f(z) = \ln\frac{z-1}{z-2}, z_0 = 1$$

$$f(z) = -\ln\left(\frac{z-2}{z-1}\right) = -\ln\left(1+\frac{-1}{z-1}\right)$$

$$\ln|1+z| = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \ldots + (-1)^{n+1}\frac{z^n}{n}$$

$$\ln\left|1+\frac{-1}{z-1}\right| = \frac{1}{z-1}\frac{1}{(z-1)^2 2} + \frac{1}{(z-1)^3 3} + \ldots + \frac{1}{(z-1)^n n} + \ldots$$

Данный ряд будет сходится при $0 < |z-1| < \infty$

## №505

$x''+x'=t^2+2t, \quad x(0)=4; \quad x'(0)=-2$

Преходим к изображениям:

$$p^2\bar{x}-px(0)-x^1(0)+p\bar{x}-x(0)=\frac{2}{p^3}+\frac{2}{p^2}$$

*или*

$$p^2\bar{x}-4p+2+p\bar{x}-4=\frac{2p+2}{p^3}$$

$$\bar{x}(p^2+p)=\frac{2p+2}{p^3}+4p-4$$

$$p^2x(p)-4p+2+px(p)-4=\frac{2}{p^3}+\frac{2}{p^2}$$

$$p^2x(p)+px(p)-4p-2=\frac{2}{p^3}+\frac{2}{p^2}$$

$$x(p)(p^2+p)=\frac{2}{p^3}+\frac{2}{p^2}+4p+2$$

$$x(p)=\frac{2+2p+4p^4+2p^3}{p^3(p^2+p)}=\frac{2(p+1)+4p^4+2p^3}{p^4(p+1)}=\frac{2(p+1)}{p^4(p+1)}+\frac{4p^4}{p^4(p+1)}+\frac{2p^3}{p^4(p+1)}=$$

$$=\frac{2}{p^4}+\frac{4}{p+1}+\frac{2}{p(p+1)};$$

$$\frac{2}{p(p+1)}=\frac{A}{p}+\frac{B}{p+1}=\frac{Ap+A+Bp}{p(p+1)}$$

$$\begin{array}{l|l} p^1 & A+B=0 \\ p^0 & \quad A=2 \end{array} \qquad B=-A=-2$$

$$\frac{2}{p(p+1)}=\frac{2}{p}-\frac{2}{p+1}$$

$$x(p)=\frac{2}{p^4}+\frac{4}{p+1}+\frac{2}{p}-\frac{2}{p+1}=\frac{2}{p^4}+\frac{2}{p+1}+\frac{2}{p}$$

$$x(t)=\frac{2t^3}{3!}+2e^{-t}+2$$

$$x(t)=\frac{t^3}{3}+2e^{-t}+2.$$

## №515

$$\begin{cases} x'+7x-y=0 \\ y'+2x+5y=0 \end{cases} \quad x(0)=1, \quad y(0)=1$$

Прейдя к изображениям, имеем:

$$\begin{cases} p\overline{x}-x(0)+7\overline{x}-\overline{y}=0 \\ p\overline{y}-y(0)+2\overline{x}+5\overline{y}=0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} p\overline{x}-1+7\overline{x}-\overline{y}=0 \\ p\overline{y}-1+2\overline{x}+5\overline{y}=0 \end{cases} \Rightarrow \overline{y}=p\overline{x}-1+7\overline{x}=x(p+7)-1$$

$$(p+5)(\overline{x}(p+5)-1)-1+2\overline{x}=0$$

$$(p^2+12p+35)\overline{x}-p-5-1+2\overline{x}=0$$

$$\overline{x}(p^2+12p+37)=p+6$$

$$\overline{x}=\frac{p+6}{p^2+12p+37}, \text{ откуда, т.к. } \overline{x}=\frac{p+6}{(p+6)^2+1}$$

Находим $x(t)=e^{-6t}\cos t$

$$\overline{y}=\frac{(p+6)(p+7)-p^2-12p-37}{p^2+12p+37}=\frac{p^2+13p+42-p^2-12p-37}{p^2+12p+37}=\frac{p+5}{p^2+12p+37}=\frac{p+6}{(p+6)^2+1}-$$

$$-\frac{1}{(p+6)^2+1}$$

*Откуда*:

$$y(t)=e^{-6t}\cos t-1e^{-6t}\sin t$$

*Ответ*:

$$x=e^{-6t}\cos t$$

$$y=e^{-6t}\cos t-1e^{-6t}\sin t.$$