№423

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}$$

Исследовать сходимость ряда $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)^2 - 1} = \frac{1}{4n^2 + 4n} = \frac{1}{4n(n+1)};$$

Применим интегральный признак Коши:

$$u_n = \frac{1}{(2n+1)^2 - 1}; \quad f(x) = \frac{1}{(2x+1)^2 - 1}$$

Найдём:

$$\int_1^{+\infty} \frac{1}{(2x+1)^2 - 1} dx = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2} \int_1^b \frac{d(2x+1)}{(2x+1)^2 - 1} = \lim_{b\to+\infty} \frac{1}{2} \times \left(-\frac{1}{2} \times \ln\left|\frac{1+(2x+1)}{1-(2x+1)}\right| \Bigg|_1^b \right) =$$

$$-\frac{1}{4} \lim_{b\to+\infty} \left(\ln\left|\frac{2+2\times1}{-2\times b}\right| - \ln\left|\frac{2+2\times1}{-2}\right| \right) = -\frac{1}{4}\left(\ln\left| -\frac{1}{-\infty} - 1 \right| - \ln|-2| \right) = -\frac{1}{4}(\ln 1 - \ln 2) = -\frac{1}{4}\ln\frac{1}{2} = 0.173$$

Следовательно ряд $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ сходится.

№433

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n, x^n, a_n = \frac{(2n)!}{n^n}$$

Найти интервал сходимости:

Решение:

$$a_n = \frac{(2n)!}{n^n}; \quad a_{n+1} = \frac{(2n+2)(2n+1)(2n)!}{(n+1)^{n+1}}$$

Найдём радиус сходимости:

$$R = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{(2n)!(n+1)^{n+1}}{n^n \cdot (2n+2)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)^n}{n^n} \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(2n+1)} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \times \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2(2n+1)} = e \times 0 = 0$$

Следовательно исследуемый ряд сходится только для x=0 (в этом случае все члены ряда будут равны нулю).

№443

$f(x) = x * arctgx; \quad b = 0,5$

Вычислить инеграл:

$$\int_0^b f(x)dx$$

Разложим в ряд: $f(x)x * arctgx$

$$x * arctgx = x\left(x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5}\right) = x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5}$$

$$\int_0^{0,5}\left(x^2 - \frac{x^4}{3} + \frac{x^6}{5}\right)dx = \left(\frac{x^3}{3} - \frac{x^5}{15} + \frac{x^7}{35}\right)\Bigg|_0^{0,5} = 0,04166 - 0,00208 + 0,00022 = 0,0398$$

$$\int_0^{0,5} x * arctgxdx \approx 0,0398.$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_10.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 10. Вариант 3. Номера 423, 433, 443, 453, 463

№453

$y' = y + y^2, \quad y(0) = 3$

Найти три первые члена ряда.

Решение:

Из условия $y(0) = 3$, имеем

$y'(0) = 3 + 9 = 12$

Дифференцируеи кравнение:

$y'' = y' + 2y * y'$

$y''(0) = 12 + 2 * 3 * 12 = 12 + 72 = 84$

Искомое решение:

$$y = 3 + \frac{12x}{1!} + \frac{84x^2}{2!} + ... = 3 + 12x + 42x^2 + ...$$

http://kvadromir.com/arutunov_sbornik_10.html — решебник Арутюнова Ю.С. Контрольная работа 10. Вариант 3. Номера 423, 433, 443, 453, 463

№463

Разложить функцию $\frac{\pi - x}{2}$ в интервале (-π-π)

Решение:

$$a_0 = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)dx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi - x}{2}dx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}xdx = I_1 - I_2.$$

$I_2 = 0$; т.к. x - нечётная функция.

$$\alpha_0 = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}dx = \frac{x}{2}\Big|_{-\pi}^{\pi} = \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} = \pi.$$

$$a_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos mxdx = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi - x}{2}\cos mxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\cos mxdx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\cos mxdx = I_1 + I_2$$

$I_1 = 0$, т.к. $\sin mx\big|_{-\pi}^{\pi} = 0$

$I_2 = 0$, т.к. произведение нечётн. $\Rightarrow a_m = 0$

$$b_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\pi - x}{2}\sin nxdx = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\sin nxdx - \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}x\sin nxdx =$$

$u = x \quad dv = \sin nxdx$

$du = dx \quad v = \int \sin nxdx = -\frac{1}{n}\cos nx$

$\int udv = uv - \int vdu$

$$= -\frac{1}{2n}\cos nx\Big|_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{2\pi}\left(x\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)\Big|_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi}\left(-\frac{1}{n}\cos nx\right)dx\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\cos \pi n + \frac{1}{2\pi}\cos(-\pi n) - \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{\pi}{n}\cos \pi n + \frac{-\pi}{n}\cos(-\pi n)' + \frac{1}{n^2}\sin nx\Big|_{-\pi}^{\pi}\right) =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\cos \pi n + \frac{1}{2\pi}\cos(-\pi n) - \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2\pi}{n}\cos \pi n + \frac{1}{n^2} * (\sin \pi n - \sin(-\pi n)\right) =$$

$$= 0 - \frac{1}{2\pi}\left(-\frac{2\pi}{n} * \cos \pi n + \frac{1}{n^2}(0 - 0)\right) = \frac{1}{n} * (-1)^n$$

$$f(x) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\left(0 * \cos nx + \frac{(-1)^n}{n}\sin nx\right) = \frac{\pi}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}\sin nx.$$