

Уравнение прямой на плоскости.

Каноническое уравнение прямой.

Пусть прямая l параллельна вектору $\vec{a} = \{p, q\}$ и проходит через точку $M_0(x_0, y_0)$, тогда уравнение этой прямой может быть записано в виде

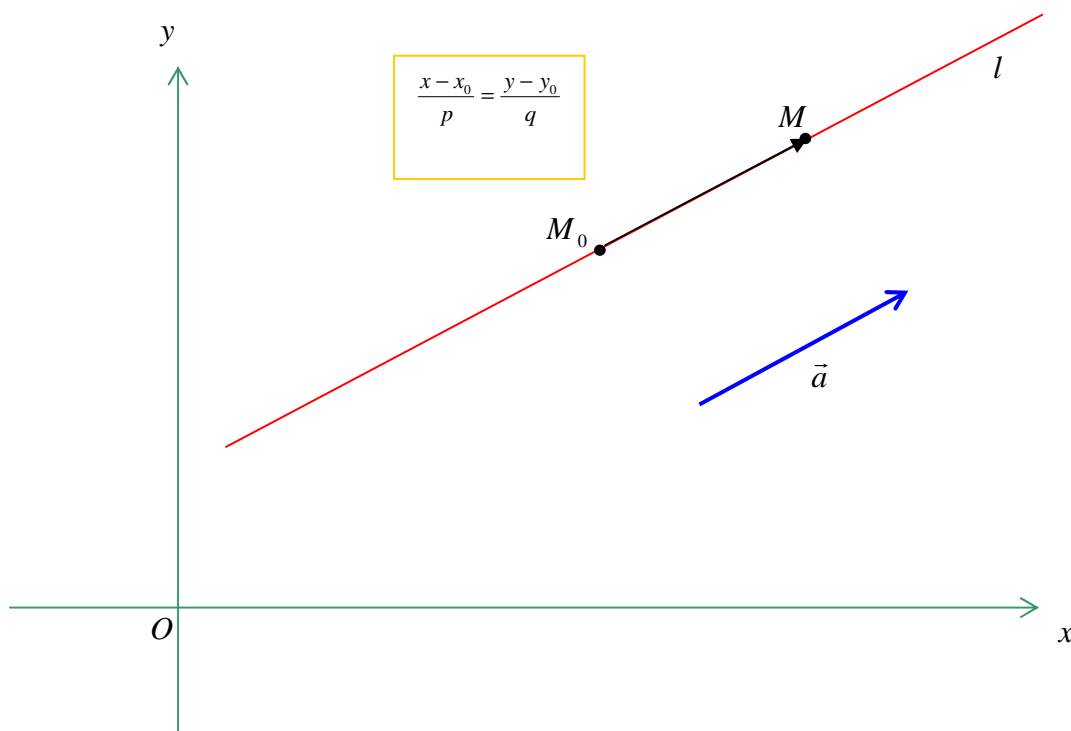
$$\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q}. \quad (1)$$

Уравнение (1) называется *каноническим уравнением* прямой, а вектор $\vec{a} = \{p, q\}$ — *направляющим вектором* прямой l .

Легко убедиться, что это действительно так. Рассмотрим произвольную точку прямой $M(x, y)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ лежит на прямой l . Но прямая l параллельна вектору \vec{a} . Следовательно, векторы $\overrightarrow{M_0M}$ и \vec{a} параллельны одной прямой, то есть они коллинеарны. Но тогда $\overrightarrow{M_0M} = k\vec{a}$, или $x - x_0 = kp$, $y - y_0 = kq$. А отсюда следует, что

$$\frac{x - x_0}{p} = k, \quad \text{и} \quad \frac{y - y_0}{q} = k.$$

Приравняв два последних равенства, получим уравнение (1).



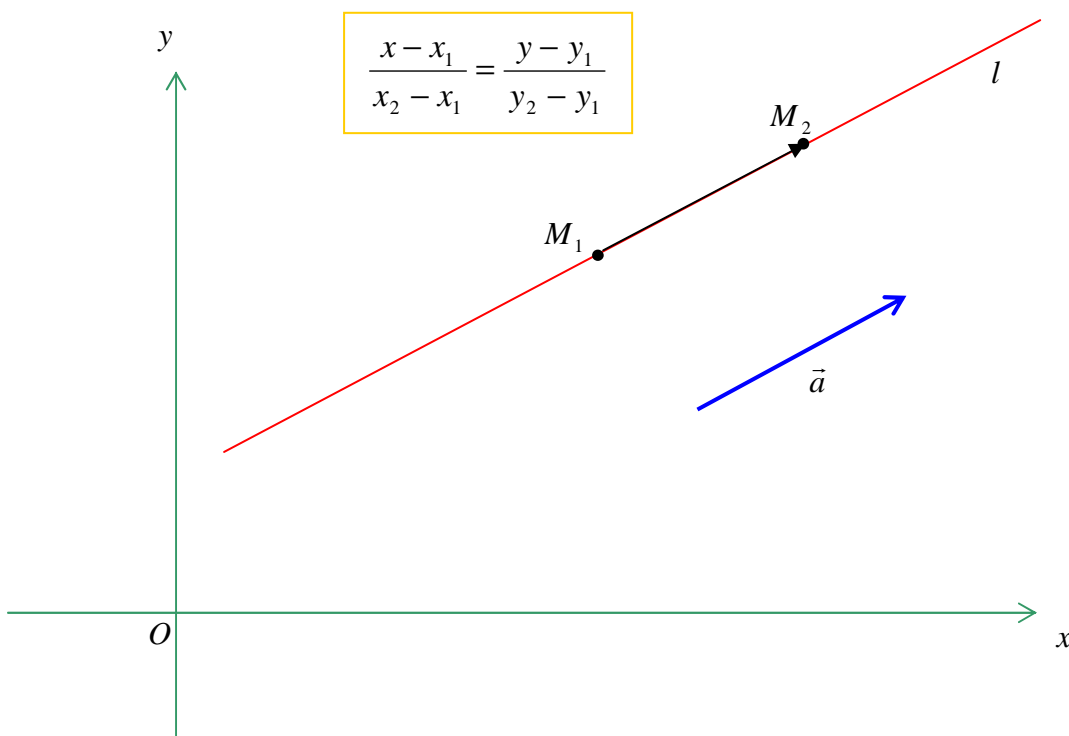
<http://www.kvadromir.com> — физика и математика для студентов

Уравнение прямой, проходящей через две точки.

Если прямая l проходит через две точки $M_1(x_1, y_1)$ и $M_2(x_2, y_2)$, то её уравнение может быть записано в виде

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}. \quad (2)$$

В этом легко убедиться, если заметить, что вектор $\vec{a} = \overline{M_1M_2}$ лежит на данной прямой, а, следовательно, коллинеарен ей. То есть вектор $\vec{a} = \overline{M_1M_2} = \{x_2 - x_1, y_2 - y_1\}$ является направляющим вектором прямой l . Кроме того, прямая l проходит через точку $M_1(x_1, y_1)$. Применяя к этой прямой уравнение (1) и учитывая, что $p = x_2 - x_1$, $q = y_2 - y_1$, получим уравнение (2).



Параметрические уравнения прямой.

Так как в уравнении (1) обе дроби равны, то они равны одному и тому же числу t . Поэтому уравнение (1) можно переписать в виде $\frac{x - x_0}{p} = \frac{y - y_0}{q} = t$. Отсюда получим систему

$$\begin{cases} \frac{x - x_0}{p} = t \\ \frac{y - y_0}{q} = t \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x - x_0 = pt \\ y - y_0 = qt \end{cases}$$

Отсюда получаем *параметрические уравнения прямой*.

$$\begin{cases} x = x_0 + pt \\ y = y_0 + qt \end{cases} \quad (3)$$

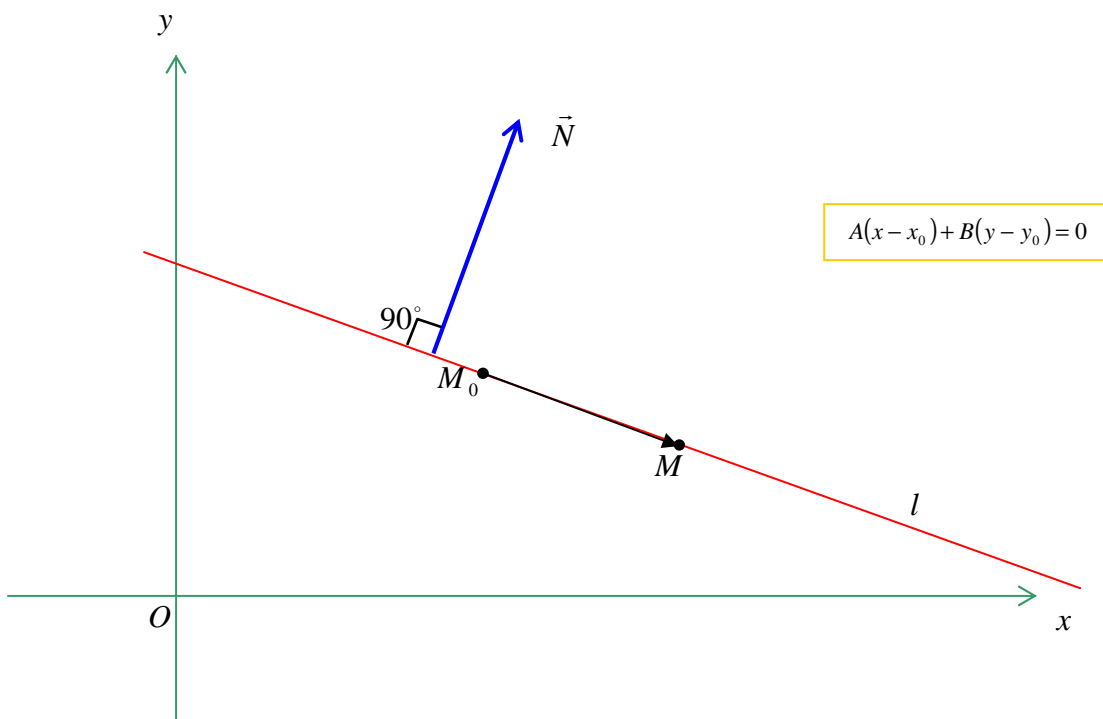
Здесь, как и в (1), $\vec{a} = \{p, q\}$ — направляющий вектор, а $M_0(x_0, y_0)$ — произвольная точка, через которую проходит прямая.

Уравнение прямой, проходящей через точку $M_0(x_0, y_0)$ и перпендикулярной вектору $\vec{N} = \{A, B\}$.

$$A(x - x_0) + B(y - y_0) = 0. \quad (4)$$

Убедимся, что так и есть. Рассмотрим произвольную точку прямой $M(x, y)$. Тогда вектор $\overrightarrow{M_0M} = \{x - x_0, y - y_0\}$ лежит на прямой l . Следовательно, вектор $\overrightarrow{M_0M}$ перпендикулярен вектору $\vec{N} = \{A, B\}$. Но если вектора перпендикулярны, то их скалярное произведение равно нулю, то есть $(\vec{N}, \overrightarrow{M_0M}) = 0$. Раскрывая скалярное произведение, как сумму произведений соответствующих координат, получим выражение (4).

Вектор $\vec{N} = \{A, B\}$ называется *нормальным вектором прямой*.



Общее уравнение прямой.

Общим уравнением прямой называется уравнение вида

$$Ax + By + C = 0. \quad (5)$$

Общее уравнение легко получить из уравнения (4), если раскрыть скобки и привести подобные слагаемые.

Нормальное уравнение прямой.

Нормальным уравнением прямой называется уравнение вида

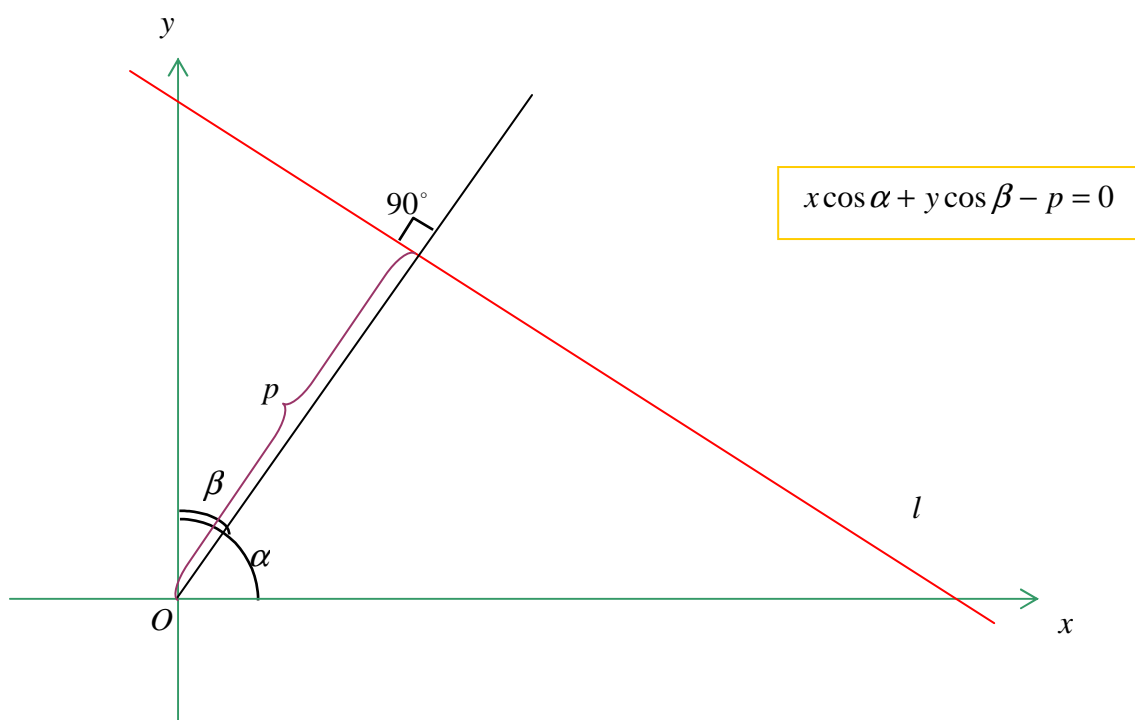
$$x \cos \alpha + y \cos \beta - p = 0. \quad (6)$$

Здесь p — длина перпендикуляра, опущенного из начала координат на данную прямую — расстояние от начала координат до прямой. α, β — углы, образованные перпендикуляром с осями координат.

Нормальное уравнение прямой можно получить из общего уравнения. Для этого, общее уравнение (5) необходимо умножить на нормирующий множитель

$$\mu = \frac{\text{sign}(C)}{\sqrt{A^2 + B^2}}.$$

Здесь $\text{sign}(C) = \pm 1$ — знак C . Принимаем $\text{sign}(C) = 1$, если $C > 0$. Если $C < 0$, то $\text{sign}(C) = -1$. Величины A, B, C это коэффициенты общего уравнения (5).

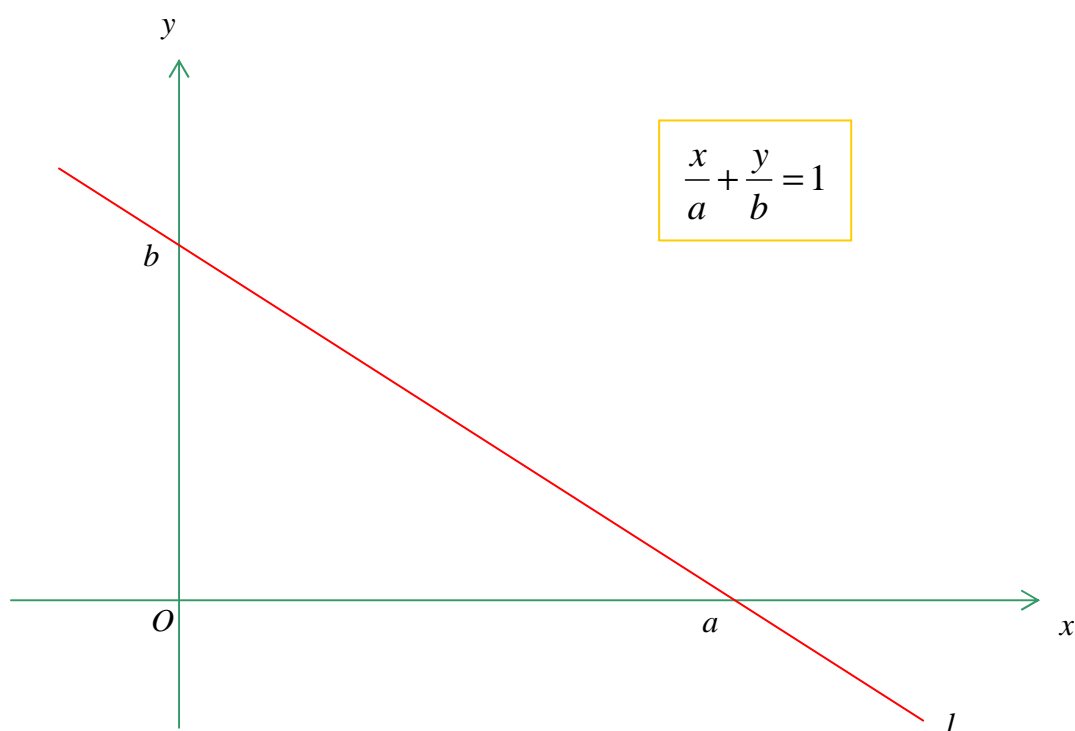


Уравнение прямой в отрезках.

Если прямая отсекает на осях координат x, y отрезки a и b соответственно, то её уравнение может быть записано в виде

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1. \quad (7)$$

Это уравнение получается из общего уравнения, если в общем уравнении (5) перенести C вправо, а затем поделить обе части уравнения на $-C$. При этом $a = -\frac{C}{A}$, $b = -\frac{C}{B}$.



Неполные уравнения прямой.

Если прямая проходит через начало координат, то $C = 0$ и общее уравнение прямой имеет вид

$$Ax + By = 0.$$

Если прямая параллельна оси Ox , то $A = 0$ и её общее уравнение имеет вид

$$By + C = 0 \quad \text{или} \quad y = y_0.$$

Если прямая параллельна оси Oy , то $B = 0$ и её общее уравнение имеет вид

$$Ax + C = 0 \quad \text{или} \quad x = x_0.$$

Уравнение прямой с угловым коэффициентом.

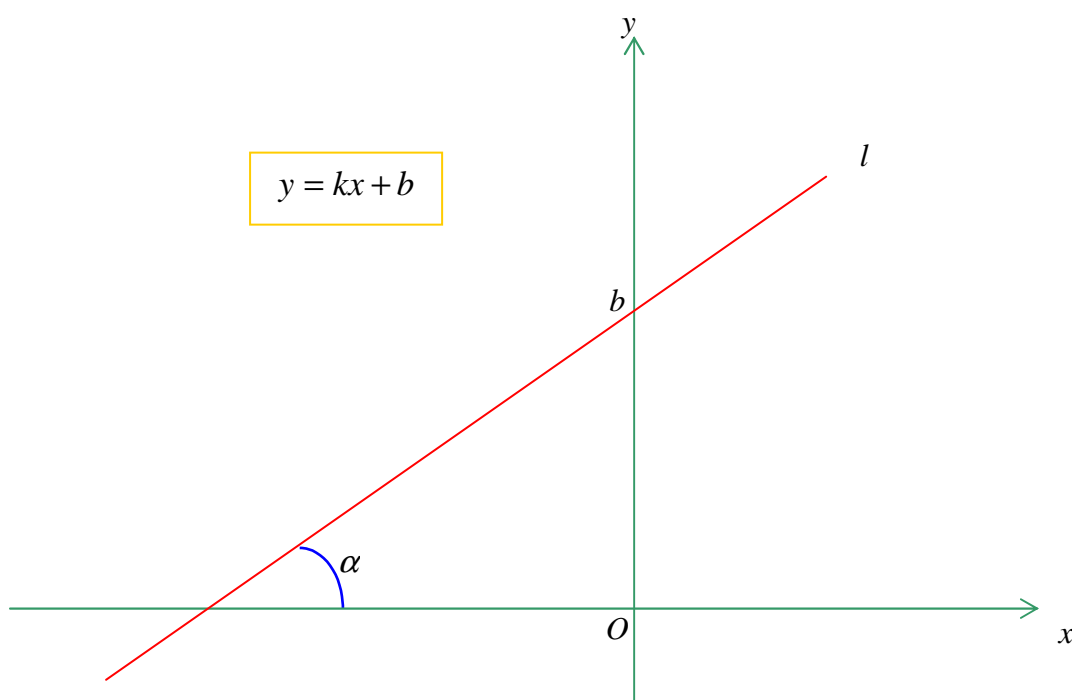
Уравнением прямой с угловым коэффициентом называется уравнение вида

$$y = kx + b .$$

(8)

Здесь $k = \operatorname{tg} \alpha$, а α — угол, образованный прямой с положительным направлением оси абсцисс Ox . Величина b равна координате пересечения прямой с осью ординат Oy .

Это уравнение легко получается из любого уравнения. Для этого необходимо из взятого уравнения выразить y через x .



<http://www.kvadromir.com> — физика и математика для студентов