Задача 1. Решить смешанную задачу.
Вариант 12.

$u_t = 4u_{xx}$; $u(x,0) = 12\sin 3\pi x + 5\sin 4\pi x$; $u(0,t) = u(6,t) = 0$.

Решение.

Это уравнение теплопроводности. Решаем задачу по методу Фурье. Решение имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t) X_n(x).$$

Здесь $X_n(x) = \sin\frac{\pi n x}{l}$ - собственные функции задачи Штурма-Лиувилля с условиями, соответствующими рассматриваемым граничным условиям;

$$T_n(t) = C_n e^{-a^2\lambda_n^2 t},$$

$\lambda_n = \frac{\pi n}{l}$ - собственные числа задачи Штурма-Лиувилля; C_n - коэффициенты, определяемые по начальным условиям.

Таким образом, решение исходной задачи имеет вид

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t} \sin\frac{\pi n x}{l}.$$

Подставим в начальное условие при $t = 0$. Получим:

$$u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin\frac{\pi n x}{l} = 12\sin 3\pi x + 5\sin 4\pi x.$$

Как видим, разложение в ряд Фурье решения заданной смешанной задачи от разложения начального условия в ряд Фурье отличается множителями $e^{-a^2\left(\frac{\pi n}{l}\right)^2 t}$.

В нашем случае $a^2 = 4$. Следовательно, решение смешанной задачи имеет вид:

$$u(x,t) = 12e^{-36\pi^2 t}\sin 3\pi x + 5e^{-64\pi^2 t}\sin 4\pi x.$$